

文章编号:1005-0930(2023)03-0599-012 中图分类号:TV142 文献标识码:A
doi:10.16058/j.issn.1005-0930.2023.03.006

基于泥沙随机交换过程及不同推移形式的推移质输沙公式

沈淇^{1,2}, 顾峰峰², 万远扬², 戚定满²

(1.同济大学土木工程学院水利工程系,上海 200092;2.上海河口海岸科学研究中心,上海 201201)

摘要:针对推移质输沙率公式难以兼顾高、低输沙强度计算的不足,提出结构上考虑推移质泥沙滑移及跃移特征的输沙率计算公式.基于无后效 Markov 随机理论,通过改进泥沙状态转化概率矩阵,优化了泥沙随机交换过程的描述.综合考虑床面遮蔽、水流脉动特征及床面泥沙运动特征的影响,从理论受力分析及概率统计角度,确定了床面推移质泥沙数量.通过引入推移质泥沙滑动、跃移平均运动速度,建立基于泥沙随机交换过程及不同推移形式的推移质输沙公式.最终计算结果与不同输沙强度下的试验及现场实测结果吻合较好,表明公式能兼顾高、低推移质输沙强度的计算,可应用于工程分析.

关键词:推移质输沙率;泥沙交换;Markov 过程;滑移;跃移;概率统计分析

推移质泥沙运动是河床演变的重要组成部分,直接影响河道冲淤变化、洲滩演变等,推移质输沙率预测的准确性对涉水工程建设及安全非常重要.20世纪90年代,钱宁和万兆惠^[1]将诸多经典的推移质输沙率公式分为四大类:(1)以 Meyer-Peter 和 Müller^[2]、Parker^[3]、Cheng^[4]为代表,根据大量实验数据建立的推移质公式;(2)以 Bagnold^[5]、窦国仁^[6]、张红武等^[7]、高建恩^[8]等为代表,根据物理学的基本概念并结合力学分析或能量平衡建立的推移质公式;(3)以 Einstein^[9]为代表,采用概率论及力学相结合的方法建立的推移质公式,随后诸多学者对 Einstein 公式进行修正^[10-11];(4)以 Englund 和 Fredsoe^[12]、Yalin^[13]为代表,包括孟震等^[14]、李林林和张根广^[15]、王愉乐等^[16],在 Einstein 或 Bagnold 的某些概念基础上,辅助以量纲分析、实测资料适线和一定推理而建立的推移质公式.近年来,随着计算机模拟技术的发展,研究人员基于泥沙运动过程中的受力分析,采用数值模拟手段研究推移质泥沙跃移运动特征,获得了推移质泥沙输沙公式^[17-20].

虽然已有研究成果丰富了推移质输沙规律及计算公式的研究,但研究多关注泥沙推移过程中某一运动形式(跃移、滑移),未能体现推移质泥沙运动随动力的变化而变化的特征,因此建立的公式未能兼顾高、低推移质输沙强度的计算.例如,Englund 和 Fredsoe^[12]主要考虑泥沙推移过程中拖曳力与摩擦力相等状态,建立了以滑移为基础的推移质输沙

收稿日期:2021-05-19;修订日期:2022-09-06

基金项目:国家重点研究发展计划项目(2017YFC0405403,2016YFC0402101)

作者简介:沈淇(1985—),男,博士研究生,副研究员.E-mail:shenqimath@hotmail.com

公式,该公式在输沙率较大的情况下计算结果偏小^[21]. Yalin^[13] 关注泥沙跃移过程水平及纵向受力情况,建立的输沙率公式在低输沙强度下计算结果偏小^[22]. Bagnold 关注泥沙跃移过程,建立的输沙公式在高输沙强度下计算结果偏大,惠遇甲和胡春宏基于高速摄影技术修正 Bagnold 计算公式^[23]. 此外, Soulsby 和 Jesper^[24] 基于流速及含沙量剖面经验关系推导并建立的推移质输沙公式,提出的公式系数 K 在水流强度较小时取值为 8,在水流强度较大时取值为 12,未能建立统一的高、低输沙强度的推移质输沙率公式.

为了能建立兼顾高、低输沙强度的推移质输沙率公式,在公式建立过程应尽可能考虑泥沙运动随动力变化而变化的特征.在此方面, Einstein^[9] 分析了床沙与推移质之间的交换现象,关注到床面泥沙运动的间歇性,建立了基于单位床面泥沙“冲刷率=沉积率”的推移质输沙率公式,但该公式未考虑交换过程中的悬移质作用.韩其为和何明民^[25-26] 提出泥沙颗粒运动的随机过程可认为是无后效 Markov 过程,建立综合考虑床沙、推移质及悬移质交换过程的随机数学处理方式.孙志林^[27] 基于状态转移概率研究了泥沙交换的随机模式.王愉乐等^[16] 建立了基于状态概率的推移质输沙公式.

以韩其为和何明民建立的床沙与运动泥沙交换过程的数学处理方式为基础,通过优化泥沙交换过程的描述,综合考虑床面泥沙的暴露度、水流脉动特征及床面泥沙运动特征的影响,引入推移质泥沙滑移及跃移速度,建立能综合反映泥沙随机交换过程及不同推移形式的推移质公式.研究成果可进一步用于描述长江中下游^[28]、潮汐河口^[29] 的悬沙和床沙交换过程、底沙输移特征及趋势.

1 泥沙交换状态的理论表达

韩其为和何明民^[26] 认为泥沙颗粒运动的随机过程可视为无后效的 Markov 过程,且假定水流流速的垂向分速与水平分速相互独立,泥沙起悬仅与水流垂向流速有关.由此得到了泥沙颗粒运动、静止状态的转化概率矩阵如下:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} & P_{14} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} & P_{24} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} & P_{34} \\ P_{41} & P_{42} & P_{43} & P_{44} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 - \varepsilon_1)(1 - \beta) & (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)(1 - \beta) & \varepsilon_2(1 - \beta) & \beta \\ (1 - \varepsilon_0)(1 - \beta) & (\varepsilon_0 - \varepsilon_2)(1 - \beta) & \varepsilon_2(1 - \beta) & \beta \\ (1 - \varepsilon_0)(1 - \beta) & (\varepsilon_0 - \varepsilon_2)(1 - \beta) & \varepsilon_2(1 - \beta) & \beta \\ (1 - \varepsilon_0)(1 - \beta) & (\varepsilon_0 - \varepsilon_2)(1 - \beta) & \varepsilon_2(1 - \beta) & \beta \end{pmatrix} \quad (1)$$

式中: P_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) 为泥沙颗粒由 i 状态转化成 j 状态的概率,其中下标 1, 2, 3, 4 分别代表泥沙静止、滚动、跃移及悬移 4 种状态; $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ 及 β 分别为不止动、起滚、起跃及起悬的运动概率.

将式(1)进行进一步转化得到式(2)^[27], 其中考虑泥沙静止、推移及悬移 3 种状态

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_1 & \varepsilon_1(1 - \beta) & \varepsilon_1\beta \\ 1 - \varepsilon_0 & \varepsilon_0(1 - \beta) & \varepsilon_0\beta \\ (1 - \varepsilon_0)(1 - \beta) & \varepsilon_0(1 - \beta) & \beta \end{pmatrix} \quad (2)$$

式中: 下标 1, 2, 3 分别代表泥沙静止、推移及悬移的 3 种状态.

式(1)中的第 4 列表明,泥沙由静转悬与由动转悬的概率相等,这与实际泥沙交换存

在一定差异.基于此,假设水流未达到泥沙滚动条件时泥沙不会发生起悬的交换过程,提出了转化概率矩阵,见式(3)^[16].

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_1 & \varepsilon_1(1 - \beta) & \varepsilon_1\beta \\ 1 - \varepsilon_0 & \varepsilon_0(1 - \beta) & \varepsilon_0\beta \\ 1 - \varepsilon_0 & \varepsilon_0(1 - \beta) & \varepsilon_0\beta \end{pmatrix} \quad (3)$$

上述转化概率矩阵差异的核心在于,对于“水流流速的垂向分速与水平分速相互独立,泥沙起悬仅与水流垂向流速有关”这一假设适用条件的认识不同.若认为泥沙起悬相对独立,则 P_{ij} 的表达需单独考虑起悬概率的影响,即如式(1)各项表达,反之,则可参考式(3)中 P_{21} 的表达形式.

综合上述研究观点,本研究提出:对于处于相对静止的泥沙颗粒(P_{11}),由于水动力相对较小,水体紊动发育程度相对较弱,可满足水流未达到泥沙滚动条件,泥沙不会发生起悬的基本假设.而对于处于运动及准运动状态的泥沙颗粒,受水体紊动及床面边界等因素影响,参考韩其为和何明民公式的处理方式,提出修正后的转化概率矩阵如下:

$$P_{ij} = \begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & P_{13} \\ P_{21} & P_{22} & P_{23} \\ P_{31} & P_{32} & P_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon_1 & \varepsilon_1(1 - \beta) & \varepsilon_1\beta \\ (1 - \varepsilon_0)(1 - \beta) & \varepsilon_0(1 - \beta) & \beta \\ (1 - \varepsilon_0)(1 - \beta) & \varepsilon_0(1 - \beta) & \beta \end{pmatrix} \quad (4)$$

根据 Markov 定理,当转移次数 $n \rightarrow \infty$ 时,极限概率 $P_i (i=1,2,3)$ 存在.由科尔莫哥洛夫方程有:

$$P_i = \sum_{j=1}^3 P_{ji}P_j \quad (5)$$

由于泥沙转化概率 $P_{ij} > 0$,且有 $P_1 + P_2 + P_3 = 1$,联立可解得

$$\begin{cases} P_1 = \frac{(1 - \varepsilon_0)(1 - \beta)}{\varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_0)(1 - \beta)} \\ P_2 = \frac{\varepsilon_1(1 - \beta)(\varepsilon_0\beta - \beta + 1)}{\varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_0)(1 - \beta)} \\ P_3 = \frac{\varepsilon_1\beta(2 + \varepsilon_0\beta - \varepsilon_0 - \beta)}{\varepsilon_1 + (1 - \varepsilon_0)(1 - \beta)} \end{cases} \quad (6)$$

P_1, P_2, P_3 即为考虑泥沙交换的状态概率(下标 1、2、3 分别对应静止、推移及悬移运动状态).状态概率求解需进一步给出泥沙不止动 ε_0 、起滚 ε_1 、起悬 β 的运动概率的理论表达.

2 泥沙运动概率

2.1 泥沙滚动起动及止动概率

以床面泥沙临界起滚(滚动起动)状态来描述推移质泥沙的临界起动状态(图 1),床面上的泥沙主要受到拖曳力 F_D 、上举力 F_L 及水下重力 W' .

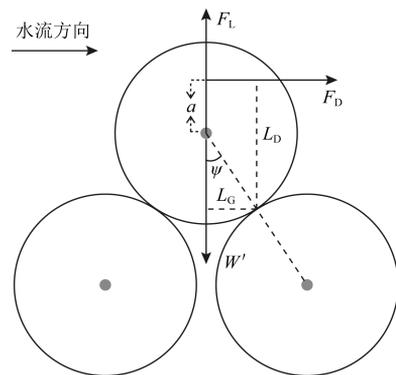


图 1 床面泥沙颗粒受力示意
Fig.1 Force on sediment particle

在临界起滚状态下,拖曳力力臂为 $L_D = a + 0.5D\cos\psi$,上举力及水下重力力臂为 $L_C = 0.5D\sin\psi$, a 为正面推移力到颗粒中心的垂直距离,其值一般取 $D/6$, ψ 为泥沙颗粒暴露角.根据床面泥沙颗粒位置的随机性, ψ 取 $0^\circ \sim 90^\circ$,且假设满足均匀分布特征^[30-31].

$$\begin{cases} F_D = \frac{\rho}{2} C_D \frac{\pi}{4} D^2 u_b^2 \\ F_L = \frac{\rho}{2} C_L \frac{\pi}{4} D^2 u_b^2 \\ W' = (\rho_s - \rho) g \frac{\pi}{6} D^3 \end{cases} \quad (7)$$

式中: C_D 、 C_L 分别为拖曳力及上举力系数; D 为泥沙粒径; u_b 为水流瞬时底部作用流速; ρ_s 、 ρ 分别为泥沙和水的密度.推移质泥沙起滚概率为:

$$\varepsilon_1 = P\{F_D L_D + F_L L_C \geq W' L_C\} \quad (8)$$

将式(7)代入式(8),整理得:

$$\varepsilon_1 = P\left\{u_b^2 \geq \frac{4}{3} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g D \frac{0.5 \sin\psi}{C_D \left(\frac{1}{6} + 0.5 \cos\psi\right) + C_L 0.5 \sin\psi}\right\} \quad (9)$$

令 $W_1 = \sqrt{\frac{4}{3} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} g D}$, $A_1 = \sqrt{\int_0^{\pi/2} \frac{0.5 \sin\psi}{C_D \left(\frac{1}{6} + 0.5 \cos\psi\right) + C_L 0.5 \sin\psi} d\psi} \cdot \frac{2}{\pi}$, 其中 A_1 为考虑泥

沙颗粒暴露角均匀分布影响的计算参数.在确定 C_L 、 C_D 参数的基础上,可积分求解获得.简化式(9)表达则有:

$$\varepsilon_1 = P\{u_b^2 \geq W_1^2 A_1^2\} = 1 - P\{-A_1 W_1 \leq u_b \leq A_1 W_1\} \quad (10)$$

水流底部瞬时流速近似服从正态分布^[32],其概率密度函数表示为:

$$f(u_b) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_b} \exp\left[-\frac{(u_b - \bar{u}_b)^2}{2\sigma_b^2}\right] \quad (11)$$

式中: \bar{u}_b 为水流底部时均流速; σ_b 为水流底部流速均方差.已有研究中^[16,25,30], $\sigma_b = 0.37\bar{u}_b$.根据式(10)、式(11),经标准化处理并展开有:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= 1 - \int_{\frac{-A_1 W_1 - \bar{u}_b}{\sigma_b}}^{\frac{A_1 W_1 - \bar{u}_b}{\sigma_b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \\ &= 1 - \int_0^{\frac{A_1 W_1 - \bar{u}_b}{\sigma_b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt - \int_0^{\frac{A_1 W_1 + \bar{u}_b}{\sigma_b}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \end{aligned} \quad (12)$$

利用误差函数近似分析^[33],有:

$$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \approx 0.5 \frac{x}{|x|} \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2}{\pi} x^2\right)} \quad (13)$$

将式(13)代入式(12)得:

$$\varepsilon_1 = 1 - 0.5 \frac{A_1 W_1 - \bar{u}_b}{|A_1 W_1 - \bar{u}_b|} \sqrt{1 - \exp\left[-\frac{2}{\pi} \frac{(A_1 W_1 - \bar{u}_b)^2}{\sigma_b^2}\right]} - 0.5 \sqrt{1 - \exp\left[-\frac{2}{\pi} \frac{(A_1 W_1 + \bar{u}_b)^2}{\sigma_b^2}\right]} \quad (14)$$

对于天然河道的推移质颗粒,粘结力和薄膜水附加压力可以忽略不计,此时泥沙起动流速等于止动流速^[25].不止动概率可近似等于起滚概率,即:

$$\varepsilon_0 = 1 - 0.5 \frac{A_1 W_1 - \bar{u}_b}{|A_1 W_1 - \bar{u}_b|} \sqrt{1 - \exp\left[-\frac{2}{\pi} \frac{(A_1 W_1 - \bar{u}_b)^2}{\sigma_b^2}\right]} - 0.5 \sqrt{1 - \exp\left[-\frac{2}{\pi} \frac{(A_1 W_1 + \bar{u}_b)^2}{\sigma_b^2}\right]} \quad (15)$$

2.2 泥沙起跃概率

基于 Einstein 对泥沙起跃过程的认识,即瞬时上举力 F_L 大于水下重力 W' , Cheng 和 Chiew^[33] 给出了泥沙起跃概率表达如下:

$$\varepsilon_2 = P\{F_L \geq W'\} = P\left\{u_b^2 \geq \frac{4}{3} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} gD \frac{1}{C_L}\right\} = 1 - P\left\{u_b^2 \leq \frac{4}{3} \frac{\rho_s - \rho}{\rho} gD \frac{1}{C_L}\right\} \quad (16)$$

令 $A_2 = \sqrt{\frac{1}{C_L}}$, 类似式(14)的处理方式,可得到起跃概率的近似表达为:

$$\varepsilon_2 = 1 - 0.5 \frac{A_2 W_1 - \bar{u}_b}{|A_2 W_1 - \bar{u}_b|} \sqrt{1 - \exp\left[-\frac{2}{\pi} \frac{(A_2 W_1 - \bar{u}_b)^2}{\sigma_b^2}\right]} - 0.5 \sqrt{1 - \exp\left[-\frac{2}{\pi} \frac{(A_2 W_1 + \bar{u}_b)^2}{\sigma_b^2}\right]} \quad (17)$$

2.3 泥沙起悬概率

借鉴随机运动学理念,认为泥沙起悬概率为水流垂向脉动流速 v' 大于泥沙沉降速度 ω , 即:

$$\beta = P\{v' \geq \omega\} \quad (18)$$

式中: v' 为水流垂向瞬时脉动流速,服从正态分布^[34],且其均值为0.根据钱宁和万兆惠^[1]研究成果, $\sigma_v \approx u_* \cdot \omega$ 计算采用张瑞瑾等^[35]紊流区沉速公式.

$$\omega = 1.72 \sqrt{gD \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho}\right)} \quad (19)$$

将式(19)带入式(18),并经标准化处理后,有:

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{\omega}{u_*}}^{+\infty} \exp\left(-\frac{v'^2}{2}\right) dv' = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{\omega}{u_*}} \exp\left(-\frac{v'^2}{2}\right) dv' \quad (20)$$

近似可得:

$$\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \exp\left(-\frac{2\omega^2}{\pi u_*^2}\right)} \quad (21)$$

3 推移质输沙公式的推导

3.1 推移质泥沙颗粒数

状态概率 $P_i (i=1,2,3)$ 可理解为单位床面上,某一动力条件下参与交换的 N 颗泥沙中,以 i 状态运动的泥沙颗粒数 $N_i = P_i N$. 因此有:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow N_2 = N_1 \frac{P_2}{P_1} \quad (22)$$

当水流处于静止时,床面上处于静止状态的泥沙颗粒数 $N'_1 = \frac{4m_0}{\pi D^2}$, 其中 m_0 为床面静密实系数,一般取为 0.4^[34]. 根据 Einstein^[9] 观点,对于推移质泥沙,它的运动行程是间歇的,而不是连续的,它被水流搬运一定距离后,便在床面形成床沙,处于相对静止状态. 因此,假设对于不同动力条件下,单位床面上仍存在处于相对静止的泥沙颗粒,且相对静止的泥沙颗粒数(N_1)应随着动力的增加而减小. 因此,假设当水流动力 $\theta > \theta_c$ 时,处于相对静止的泥沙颗粒数为:

$$N_1 = N'_1 \left(\frac{\theta_c}{\theta} \right)^{K_1} = \frac{4m_0}{\pi D^2} \left(\frac{\theta_c}{\theta} \right)^{K_1} \quad (23)$$

式中: $K_1 > 0$ 为待定的经验系数; $\theta = \frac{\rho u_*^2}{(\gamma_s - \gamma) D}$ 为水流强度; θ_c 为泥沙起动条件.

3.2 推移质泥沙平均运动速度

床面泥沙以滚动、滑动还是跃移的方式运动,取决于水流强度和床面特性^[17]. 滑动(滚动)、跃移为推移质泥沙的运动形式. 韩其为和何明民^[25]、Mazumder 等^[36] 认为泥沙起动的初始阶段以及当水流强度较小时,床面剪切力较小,泥沙则主要以滑动(滚动)的形式运动. 随着水流动力的增加, Einstein^[9]、Wiberg 和 Smith^[37] 认为跳跃是推移质的主要形式.

基于此,针对推移质泥沙运动的主要形式,结合泥沙起跃概率(ε_2),提出考虑不同推移运动形式的推移质泥沙平均运动速度(U_s),其中推移质滑动(滚动)平均运动速度 U_{s1} 参考孟震等^[14] 基于滑动平衡方程推导结果(假设底部水流作用流速 $\bar{u}_b = K_2 u_*$),推移质跃移平均运动速度 U_{s2} 参考 Lee 等^[18] 基于力学分析,建立颗粒运动方程而计算获得的运动速度统计结果(式(26)中 ν 为水流运动粘滞系数).

$$U_s = (1 - \varepsilon_2) U_{s1} + \varepsilon_2 U_{s2} \quad (24)$$

$$U_{s1} = K_2 u_* \left(1 - \sqrt{\frac{\theta_c}{\theta}} \right) \quad (25)$$

$$\begin{cases} U_{s2} = 3.019 u_* D_*^{0.163} T_*^{0.193} \\ D_* = D \left(\frac{\rho_s - \rho}{\rho \nu^2} g \right)^{1/3} \\ T_* = \frac{\theta - \theta_c}{\theta_c} \end{cases} \quad (26)$$

3.3 推移质输沙公式的建立

在低强度水流冲刷下,推移质一般为第一层床沙中的部分泥沙,而当水流强度增大到一定程度后,推移质运动变成了多层运动.因此,在推移质输沙公式中需要引起推移质运动厚度的修正^[38],即 $K_3(\theta - \theta_c)$.

综合式(6)、式(14)~式(15)、式(17)、式(21)~式(26),整理得以质量计得推移质输沙公式表达式为

$$g_b = N_2 \frac{\pi}{6} \rho_s D^3 U_s \Rightarrow g_b = \frac{2}{3} \rho_s m_0 D \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 \beta - \beta + 1)}{(1 - \varepsilon_1)} K_3 u_* (\theta - \theta_c) \left(\frac{\theta_c}{\theta} \right)^{K_1} \left[(1 - \varepsilon_2) K_2 \left(1 - \sqrt{\frac{\theta_c}{\theta}} \right) + 3.019 \varepsilon_2 D_*^{0.163} T_*^{0.193} \right] \quad (27)$$

引入 Einstein 无量纲输沙强度 $\phi = g_b \cdot \left(\rho_s D \sqrt{\frac{(\gamma_s - \gamma)}{\rho}} D \right)^{-1}$, 式(27)为

$$\phi = \frac{2}{3} m_0 \frac{\varepsilon_1(\varepsilon_1 \beta - \beta + 1)}{(1 - \varepsilon_1)} K_3 \sqrt{\theta} (\theta - \theta_c) \left(\frac{\theta_c}{\theta} \right)^{K_1} \left[(1 - \varepsilon_2) K_2 \left(1 - \sqrt{\frac{\theta_c}{\theta}} \right) + 3.019 \varepsilon_2 D_*^{0.163} T_*^{0.193} \right] \quad (28)$$

根据已有研究的取值方法, C_L 取值约为 0.1~0.4, C_D 取值约为 0.15~0.5, 进一步参考 Papanicolaou 等^[39]研究成果, 取 $C_L = 0.2$, $C_D = 0.4$ (式(10)). 泥沙起动条件 θ_c 参考 Parker^[3]的分析成果, 取为 0.03. 综合采用 Soulsby 和 Jesper^[24]整理的 Meyer-Peter、Wilson、Gilbert 等的实验资料率定式(28)中的待定系数 K_1, K_2, K_3 (图 2), 即 $K_1 = 0.88, K_2 = 7.69, K_3 = 0.95$. 系数率定结果基本合理, K_1, K_3 均大于 0, 而系数 $K_2 = 7.69$, 满足 Engelund 和 Fredsoe^[12]提出的系数取值范围为 6~10. 式(28)中, $m_0 = 0.4$; ε_1 的计算见式(14), 其中 $\bar{u}_b = 7.69 u_*$, $\sigma_b = 0.37 \bar{u}_b = 2.85 u_*$, $A_1 = 0.937$; ε_2 的计算见式(17), 其中 $A_2 = 2.24$; β 的计算见式(21); D_* 及 T_* 的计算见式(26).

4 公式对比分析

选取不同类型的推移质输沙率公式与该研究公式进行对比(图 2), 公式种类包括: (1) 采用确定性研究方法的推移质公式(即含泥沙起动条件 θ_c): Bagnold^[5] ($\theta_c = 0.047$)、Yalin^[13] ($\theta_c = 0.047$)、Soulsby^[24] ($\theta_c = 0.05$)、Engelund^[12] ($\theta_c = 0.047$) 公式; (2) 采用随机性研究方法的推移质公式: Einstein^[9]、Armanini^[42]、Wang^[11] 公式; (3) 经验性推移质公式: Parker^[3] ($\theta_c = 0.03$)、Meyer-Peter^[2] ($\theta_c = 0.047$)、Cheng^[4] 公式; (4) 综合确定性研究及随机性研究方法的推移质公式: 孟震^[14] ($\theta_c = 0.03$) 公式. 统计对比指标采用表示输沙率计算精度的均方根误差(RMSE)

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (X_i - Y_i)^2} \quad (29)$$

式中: N 为推移质输沙率采样的样本个数; X_i 为公式计算值; Y_i 为实测值. $RMSE$ 越小, 表

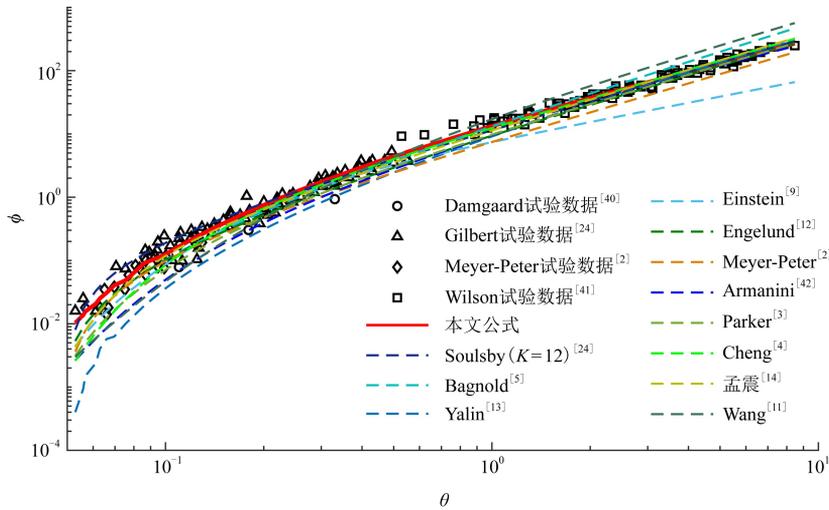


图2 系数率定及公式对比

Fig.2 Coefficient calibration and formula comparison

明推移质公式计算精度越高.

本研究分两种水流强度对比各家公式的计算结果(表1),对比结果显示,本研究建立的输沙公式计算精度较高,具体表现为:

(1)在水流强度 $\theta < 1$ 的低输沙条件下,参考的实验数据来自 Meyer-Peter、Wilson 和 Damgaard 的实验结果,本文所建立的输沙公式 *RMSE* 值最小,约为 0.8. Yalin、Parker、Wang 公式的计算结果,在低输沙条件下计算值偏小, Soulsby ($K = 12$) 下,在低输沙情况下,计算值偏大.在水流强度较低的低输沙条件下,本公式与 Bagnold 公式的计算结果接近;

(2)在水流强度 $1 < \theta < 10$ 的高输沙条件下,参考的实验数据均来自 Wilson 的实验结果,本研究所建立的输沙公式的 *RMSE* 值仍最小,约为 9.2. Wang、Bagnold 公式的计算结果,在高输沙条件下计算值偏大,而 Einstein、Meyer-Peter 公式的计算结果,在高输沙条件下计算值偏小.在水流强度较大的高输沙条件下,本公式与 Soulsby 公式的计算结果接近.

表1 利用 Gilbert 等 4 家经典实验数据与各家推移质输沙率计算结果均方根误差统计

Table 1 The *RMSE* between the calculated bedload transport rate and the four classical set of experimental results collected by Gilbert et al

水流强度	本文公式	Soulsby	Bagnold	Yalin	Einstein	Engelund	Meyer-Peter	Armanini	Parker	Cheng	孟震	Wang
$\theta < 1$	0.8	1.0	0.9	1.6	1.5	1.4	1.7	1.4	1.3	0.9	1.1	0.9
$1 < \theta < 10$	9.2	10.4	53.3	12.5	68.8	13.2	32.8	13.3	12.2	14.8	15.9	89.4

造成上述公式(如 Yalin、Parker、Wang、Bagnold、Einstein、Meyer-Peter)难以兼顾高低输沙条件下推移质输沙率的计算,主要原因之一在于公式建立过程多关注于推移质某一运动特征,使得公式结构存在一定局限性.为进一步验证本研究建立的公式,补充对比了孟震^[43]的输沙强度实验结果(图3)以及现场实测^[1,11,44]的推移质输沙强度结果(图4).对比验证结果显示,本公式计算结果具有较高的精度.与孟震的实验结果相比,计算的输

沙强度结果接近,计算的 $RMSE$ 值约为 0.03,孟震公式的 $RMSE$ 值约为 0.02.与现场实测的推移质输沙强度相比,基于本公式计算的推移质输沙强度与实测结果吻合良好,能兼顾现场高低输沙强度的计算.

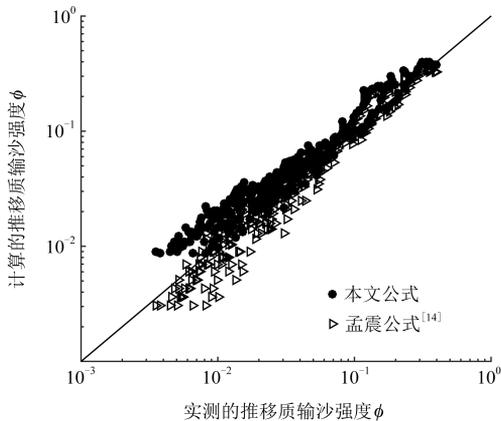


图3 基于孟震水槽实验的公式验证
Fig.3 Formula validation based on the experimental result collected by Mengzhen

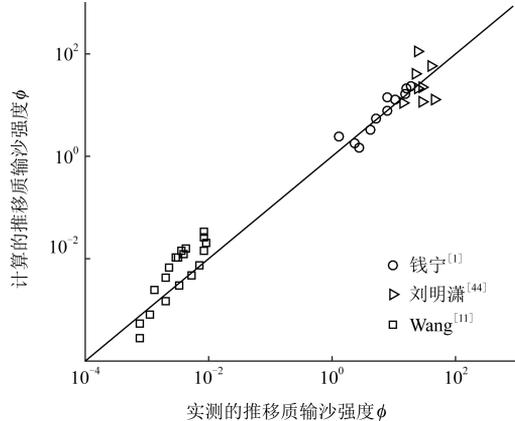


图4 基于现场输沙结果的公式验证
Fig.4 Formula validation based on the in-situ bedload measurement

5 结论

(1) 在推移质输沙率公式推导过程中,总结已有研究对床面泥沙交换过程的认识,改进泥沙状态转化概率矩阵,优化了泥沙随机交换过程描述.综合考虑床面泥沙相对暴露度、床面泥沙运动间歇性、水流脉动特征以及泥沙推移运动形式,引入了推移质泥沙滑移及跃移平均速度,建立了考虑泥沙随机交换过程及不同推移形式的推移质输沙率公式;

(2) 利用 Meyer-Peter、Wilson、Gilbert、Damgaard 四家经典实验数据,结合孟震实验数据以及现场实测的高、低推移质输沙强度数据,率定并验证了本文的推移质输沙公式.经结果对比分析,该公式计算精度较高,可适用于不同输沙强度的推移质输沙率计算.

参考文献

- [1] 钱宁,万兆惠.泥沙运动力学[M].北京:科学出版社,1993
Qian Ning, Wan Zhaohui. Mechanics of sediment transport[M]. Beijing: Science Press, 1993
- [2] Meyer-Peter E, Müller R. Formulas for bed-load transport[C]. Proceedings of the 2nd Meeting of the International Association for Hydraulic Structures Research, 1948; 39-64
- [3] Parker G. Self-formed straight rivers with equilibrium banks and mobile bed. part 2. the gravel river[J]. Journal of Fluid Mechanics, 1978, 89(1): 127-146
- [4] Cheng N S. Exponential formula for bed-load transport[J]. Journal of Hydraulic Engineering, 2002, 128(10): 942-946
- [5] Bagnold R A. The nature of saltation and of "bed-load" transport in water[J]. Proceedings of the Royal Society of London, 1973, 332(1591): 473-504
- [6] 窦国仁.全沙模型相似律及设计实例[J].水利水运科技情报, 1977, 5(3): 1-20
Dou Guoren. Similarity law and design example of the whole sediment model[J]. Journal of Water Conservancy and Carriage Technology, 1977, 5(3): 1-20

- [7] 张红武,张俊华,卜海磊,等.试论推移质输沙率公式[J].南水北调与水利科技,2011,9:140-145
Zhang Hongwu,Zhang Junhua,Bu Hailei,et al.Discussion of bed-load transport equations[J].South-to-North Water Diversion and Water Science & Technology,2011,9:140-145
- [8] 高建恩.推移质输沙规律的再探讨[J].水利学报,1993,(4):62-69
Gao Jianen.New study on formula of bed load sediment transport rate[J].Journal of Hydraulic Engineering,1993,(4):62-69
- [9] Einstein H A.The bed-load function for sediment transportation in open channel flows[M].USA:US Department of Agriculture,1950
- [10] 王士强.对爱因斯坦均匀沙推移质输沙率公式修正的研究[J].泥沙研究,1985,(1):44-53
Wang Shiqiang.The study on revise of Einstein formula of average bed load sediment transport rate[J].Journal of Sediment Research,1985,(1):44-53
- [11] Wang X K,Zheng J,Li D X,et al.Modification of the Einstein bed-load formula[J].Journal of Hydraulic Engineering,2008,134(9):1363
- [12] Engelund F,Fredsoe J.A sediment transport model for straight alluvial channels[J].Hydrology Research,1976,7(5):293-306
- [13] Yalin M S.Mechanics of sediment transport[M].2nd edn.ed.Oxford,UK:Pergamon Press,1977
- [14] 孟震,陈槐,李丹勋,等.推移质平衡输沙率公式研究[J].水利学报,2015,46(9):1080-1088
Meng Zhen,Chen Huai,Li Danxun,et al.Study of bed-load transport formulas[J].Journal of Hydraulic Engineering,2015,46(9):1080-1088
- [15] 李林林,张根广.基于全概率的推移质输沙率公式[J].泥沙研究,2018,43(6):15-22
Li Linlin,Zhang Genguang.Formula of bed-load sediment transport based on full threshold probability[J].Journal of Sediment Research,2018,43(6):15-22
- [16] 王瑜乐,张根广,李林林,等.基于泥沙状态概率的推移质输沙率公式[J].泥沙研究,2018,43(5):1-6
Wang Yule,Zhang Genguang,Li Linlin,et al.Formula of bed load transport rate based on state probability of sediment[J].Journal of Sediment Research,2018,43(5):1-6
- [17] 白玉川,陈有华,韩其为.泥沙颗粒跃移运动机理[J].天津大学学报(自然科学与工程技术版),2012,45(3):10-15
Bai Yuchuan,Chen Youhua,Han Qiwei.Bed load saltation movement mechanism[J].Journal of Tianjin University (Science and Technology),2012,45(3):10-15
- [18] Lee H Y,You J Y,Lin Y T.Continuous saltating process of multiple sediment particles[J].Journal of Hydraulic Engineering,2002,128(4):443-450
- [19] Lee H Y,Chen Y H,You J Y,et al.Investigations of continuous bed load saltating process[J].Journal of Hydraulic Engineering,2000,126(9):691-700
- [20] Lee H Y,Lin Y T,You J Y,et al.On three-dimensional continuous saltating process of sediment particles near the channel bed[J].Journal of Hydraulic Research,2006,44(3):374-389
- [21] 夏华永,廖世智,肖志建.基于床面层能量平衡关系的推移质输沙率计算式[J].水利水运工程学报,2006,(4):1-9
Xia Huayong,Liao Shizhi,Xiao Zhijian.Formula for bedload sediment transport rate based on energy balance relationship within bed-surface layer[J].Hydro-Science and Engineering,2006,(4):1-9
- [22] 钱宁.推移质公式的比较[J].水利学报,1980,(4):1-11
Qian Ning.Comparison on bedload formula[J].Journal of Hydraulic Engineering,1980,(4):1-11
- [23] 惠遇甲,胡春宏.Bagnold 推移质输沙理论中有关参数的探讨[J].泥沙研究,1991,(3):9-19
Hui Yujia,Hu Chunhong.Investigation of parameters concerning Bagnold's theory of bedload transport[J].Journal of Sediment Research,1991,(3):9-19
- [24] Soulsby R L,Jesper S D.Bedload sediment transport in coastal waters[J].Coastal Engineering,2005,52(8):673-689
- [25] 韩其为,何明民.泥沙运动统计理论[M].北京:科学出版社,1984
Han Qiwei,He Mingmin.The theory on sediment statistics[M].Beijing:Science Press,1984
- [26] 韩其为,何明民.底层泥沙交换和状态概率及推悬比研究[J].水利学报,1999,(10):9-18
Han Qiwei,He Mingmin.Study on state probabilities and the ratio of bed load to suspended load[J].Journal of Hydraulic Engineering,1999,(10):9-18

- [27] 孙志林.泥沙交换的随机模式[J].泥沙研究,1989,(3):1-9
Sun Zhilin.A stochastic model of sediment interchanges[J].Journal of Sediment Research,1989,(3):1-9
- [28] 杨云平,张明进,李松喆,等.三峡大坝下游粗细颗粒泥沙输移规律及成因[J].湖泊科学,2017,29(4):942-954
Yang Yunping,Zhang Mingjin,Li Songzhe,et al.Transport patterns of the coarse and fine sediments and its causes in the downstream of the Three Gorges Dam[J].Journal of Lake Science,2017,29(4):942-954
- [29] 杨云平,张明进,樊咏阳,等.长江河口悬沙颗粒特征变化趋势及成因[J].应用基础与工程科学学报,2016,24(6):134-149
Yang Yunping,Zhang Mingjin,Fan Yongyang,et al.Variation trend and causes of suspended sediment characteristic in Yangtze Estuary[J].Journal of Basic Science and Engineering,2016,24(6):134-149
- [30] Wu F C,Chou Y J.Rolling and lifting probabilities for sediment entrainment[J].Journal of Hydraulic Engineering,2003,129(2):110-119
- [31] Paintal A S.A stochastic model of bed-load transport[J].Journal of Hydraulic Research,1971,9(4):527-554
- [32] 韩其为.泥沙起动规律及起动流速[J].泥沙研究,1982,(2):13-28
Han Qiwei.The incipient disciplinarian and incipient velocity of sediment[J].Journal of Sediment Research,1982,(2):13-28
- [33] Cheng N S,Chiew Y M.Pickup probability for sediment entrainment[J].Journal of Hydraulic Engineering,1998,124(2):232-235
- [34] 韩其为,何明民.泥沙起动规律及起动流速[M].北京:科学出版社,1999
Han Qiwei,He Mingmin.The incipient disciplinarian and incipient velocity of sediment[M].Beijing:Science Press,1999
- [35] 张瑞瑾,谢鉴衡,陈文彪.河流动力学[M].武汉:武汉大学出版社,2007
Zhang Ruijin,Xie Jianheng,Chen Wenbiao.River dynamics[M].Wuhan:Wuhan University Press,2007
- [36] Mazumder B S,Anindita B,Satya P O.Near-bed particle motion due to turbulent flow using image-processing technique[J].Journal of Flow Visualization and Image Processing,2008,15(1):1-15
- [37] Wiberg P L,Smith J D.Calculations of the critical shear stress for motion of uniform and heterogeneous sediments[J].Water Resources Research,1987,23(8):1471-1480
- [38] Nielsen P.Coastal bottom boundary layers and sediment transport[M].Singapore:World Scientific,1992
- [39] Papanicolaou A N,Diplas P,Evangelopoulos N,et al.Stochastic incipient motion criterion for spheres under various bed packing conditions[J].Journal of Hydraulic Engineering,2002,128(4):369-380
- [40] Damgaard J S,Whitehouse R J S,Soulsby R L.Bed-load sediment transport on steep longitudinal slopes[J].Journal of Hydraulic Engineering,1997,123(12):1130-1138
- [41] Wilson K C.Bed-load transport at high shear stress[J].Proc.ASCE,J.Hydraul.Div.1966,92(6):49-59
- [42] Armanini A,Cavedon V,Righetti M.A probabilistic/deterministic approach for the prediction of the sediment transport rate[J].Advances in Water Resources,2014,81(7):10-18
- [43] 孟 震.推移质运动基本规律研究[D].北京:清华大学,2015
Meng Zhen.Several fundamental aspects of bed-load transport mechanics[D].BeiJing:Tsinghua University,2015
- [44] 刘明潇,孙东坡,高 磊,等.黄河中下游推移质泥沙输移特性研究[J].人民黄河,2013,35(12):24-26
Liu Mingxiao,Sun Dongpo,Gao Lei,et al.,Study on transport characteristics of bed load in the middle and lower Yellow River[J].Yellow River,2013,35(12):24-26

A Formula for Bedload Transport Based on the Stochastic Sediment Interchanges and the Different Motion Patterns

SHEN Qi^{1,2}, GU Fengfeng², WAN Yuanyang², QI Dingman²

(1. Department of Hydraulic Engineering, Tongji University, Shanghai 200092, China; 2. Shanghai Estuarine and Coastal Science Research Center, Shanghai 201201, China)

Abstract

A new bedload transport rate formula which considered the saltation load motion and the contact load motion was proposed. This formula overcame the shortage of present formulas whose accuracy mostly couldn't be both acceptable when calculating the bedload transport rate under high and low flow dynamics. The finite state Markov process was used to describe the stochastic sediment interchanges. The sediment transform probability was modified for better description of sediment interchanges. According to a comprehensive consideration of the exposure angle, turbulence and the characteristics of bed sediments, the amounts of bedload was determined by the force analysis and the probabilistic statistics. After that, the new formula based on the stochastic sediment interchanges and the different motion patterns was derived by combining the saltation velocity and the slide velocity of bedload. Computations from this formula agree with both the results from indoor experiments and the in-situ observations, which cover the high and low flow dynamics. These agreements indicate this new formula could be used to estimate the bedload transport rate under different flow dynamics.

Keywords: bedload transport rate; sediment interchange; Markov process; contact load motion; saltation load motion; probabilistic statistical analysis